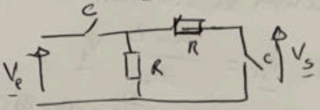
Corrigé ex 4

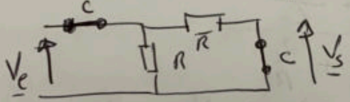
① • Un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences.

$$\left(Z_c = \frac{1}{jC\omega} \to \infty \text{ si } \omega \to 0 \right)$$



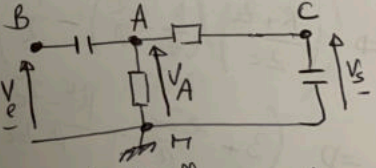
$\underline{V_s} = 0$

• Un condensateur se comport comme un interrupteur fermé à hautes fréquences. $\left(\frac{1}{jC\omega} \to 0 \text{ si } \omega \to \infty \right)$



$\underline{V_s} = 0$

Le filtre se comporte comme un filtre passe-bande du second ordre.



② $$T(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_A}} \cdot \frac{\underline{V_A}}{\underline{V_e}}$$

On peut appliquer le Théorème de Millman en A.

(C'est la loi des nœuds en terme de potentiels)

$$\underline{V_A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

Donc $$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_B}}{Z_c} + \frac{\underline{V_C}}{R} + \overbrace{\frac{\underline{V_M}}{R}}^{=0}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V_A} = \frac{\frac{\overbrace{\underline{V_B}}^{=\underline{V_e}}}{Z_c} + \frac{\overbrace{\underline{V_C}}^{=\underline{V_s}}}{R}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{Z_c} + \frac{\underline{V_s}}{R}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \quad (*)$$

D'autre part, on peut utiliser le diviseur de tension

$$\underline{V_s} = \frac{Z_c}{R + Z_c} \underline{V_A} \Rightarrow \underline{V_A} = \frac{R + Z_c}{Z_c} \underline{V_s}$$

on remplace cette expression ds l'équation (*), on obtient :

$$\frac{R + Z_c}{Z_c} \underline{V_s} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{Z_c} + \frac{\underline{V_s}}{R}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{2}{R}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R + Z_c}{Z_c}\right)\left(\frac{1}{Z_c} + \frac{2}{R}\right)\underline{V_s} = \frac{\underline{V_e}}{Z_c} + \frac{\underline{V_s}}{R}.$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{R + Z_c}{Z_c}\right)\left(\frac{1}{Z_c} + \frac{2}{R}\right) - \frac{1}{R}\right)\underline{V_s} = \frac{\underline{V_e}}{Z_c}$$

$$\Rightarrow \left(3 + \frac{2 Z_c}{R} + \frac{R^2 - Z_c^2}{R \cdot Z_c}\right)\underline{V_s} = \underline{V_e}.$$

$$\text{donc } T(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{3 + \frac{2}{jc\omega R} + \frac{R^2 - \left(\frac{1}{jc\omega}\right)^2}{\frac{R}{jc\omega}}} \quad \left\{ \times \frac{jc\omega R}{jc\omega R} \right.$$

$$T(j\omega) = \frac{jc\omega R}{1 + 3jc\omega R + (jc\omega R)^2}$$

$$T(j\omega) = \frac{jx}{1 + 3jx + (jx)^2} \quad ; \text{avec } x = c\omega R = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Par comparaison avec la forme canonique du filtre passe-bande second ordre, on en déduit

$$T_0 = \frac{1}{2m} \quad , \quad 2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \ (> 1$$

(3) $m = \frac{3}{2} > 1$, la fonction de transfert du second ordre on peut la mettre sous forme de deux fonctions simples du premier ordre.

alors, soit le polynôme $1 + 3jx + (jx)^2 \overset{u = jx}{=} 1 + 3u + u^2$

$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$, le polynôme admet deux racines réelles $\begin{cases} u_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ u_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

donc le dénominateur peut s'écrire

$$1 + 3jx + (jx)^2 = \left(jx + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(jx + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

donc, la fonction de transfert peut s'écrire :

$$T(j\omega) = jx \cdot \frac{1}{\left(jx + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(jx + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{jx}{\underbrace{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)}_{1}\left(1 + j\frac{x}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\right)\left(1 + j\frac{x}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\right)}$$

D'où $T(j\omega) = \underbrace{jx}_{T_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+jx_1}}_{T_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+jx_2}}_{T_3}$

$x_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$ et $x_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$

$\omega_1 = \omega_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

A.N $\omega_1 \simeq 0{,}38\omega_0$ et $\omega_2 \simeq 2{,}61\omega_0$.

$$\boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 \simeq \omega_0^2}$$

* Gain en dB :

$G = G_1 + G_2 + G_3$

$G = 20\log x - 20\log\sqrt{1+x_1^2} - 20\log\sqrt{1+x_2^2}$

$\omega_1 \quad \omega_0 \quad \omega_2 \longrightarrow \omega$

• $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$G_{dB} \simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 20\log\frac{\omega}{\omega_1} - 0$

$\left(\frac{\omega}{\omega_1} > 1\right.$, donc $\log\sqrt{1+x_1^2} \simeq \log x_1$

$\left(\right.$car $\frac{\omega}{\omega_2} < 1$ donc $\log\sqrt{1+x_2^2} \simeq \log 1 = 0$

donc $G_{dB} \simeq 20\log\frac{\omega_1}{\omega_0}$

$\simeq 20\log 0{,}38 \simeq -8{,}4\,dB$.

• $\omega \leq \omega_1$

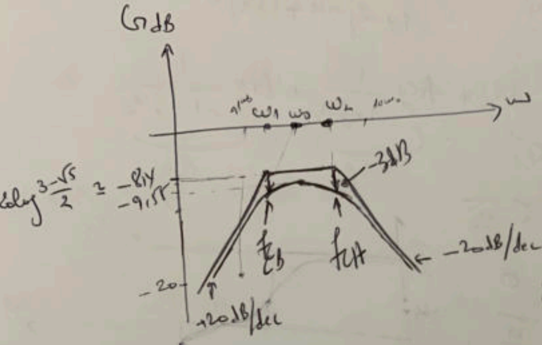
$G_{dB} \simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_0} + 0 + 0$ (pente de $+20\,dB/dec$)

• $\omega \geq \omega_2$ $\quad G_{dB} \simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 20\log\frac{\omega}{\omega_1} - 20\log\frac{\omega}{\omega_2}$

$\simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 20\left(\log\frac{\omega}{\omega_1}\cdot\frac{\omega}{\omega_2}\right)$

$\simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 20\log\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 40\log\frac{\omega}{\omega_0}$

• $\underline{\omega > \omega_2}$ $\quad G_{dB} \simeq -20\log\frac{\omega}{\omega_0}$ (pente de -20 dB/dec)



$BP = [f_{cB}, f_{cH}]$.

$$G(\omega=\omega_0) = 20\log\frac{\omega_0}{\omega_0} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)^2}$$

$-9,55$ dB.

$$G(\omega=\omega_0) \simeq -9,55 \text{ dB}.$$

• Les fréquences de coupures

$$|T(\omega=\omega_1)| = \frac{\omega_1/\omega_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}} \simeq 0,26$$

$$G(\omega=\omega_1) \simeq -11,5 \text{ dB}$$

$$T(\omega=\omega_2) = \frac{\omega_2/\omega_0}{\sqrt{1+\frac{\omega_2}{\omega_1}}\sqrt{2}} = \frac{2,61}{\sqrt{1+\left(\frac{2,61}{0,38}\right)^2}\sqrt{2}} \simeq 0,26$$

$$\Rightarrow G_{dB} \simeq -11,5 \text{ dB}$$

$$BP = [0,38\,\omega_0, 2,61\,\omega_0]$$

* Courbe de phase

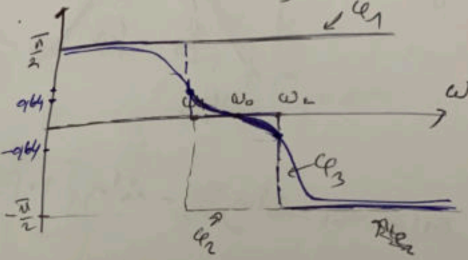
$$\varphi = \text{Arg}\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \text{Arg}\frac{jx}{1+2jmx+(jx)^2}$$

$$\varphi = \underbrace{\text{Arg}(jx)}_{\varphi_1} + \underbrace{\text{Arg}\frac{1}{1+jx_1}}_{\varphi_2} + \underbrace{\text{Arg}\frac{1}{1+jx_2}}_{\varphi_3}$$

$\varphi_1 \xrightarrow{\text{Imaginaire pure}} \frac{\pi}{2}$

φ_2 En BF $\rightarrow 0$; En HF $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$

φ_3 en BF $\rightarrow 0$; en HF $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$



$$\varphi(\omega_0) = \underbrace{\arg(j)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arg\left(1+j\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)}_{\text{arctg}\frac{\omega_0}{\omega_1}} - \underbrace{\arg\left(1+j\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)}_{\text{arctg}\frac{\omega_0}{\omega_2}} \simeq 0$$

$$\varphi(\omega_1) = \frac{\pi}{2} - \arg\left(1+j\frac{\omega_1}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \simeq 36{,}71^\circ \simeq 0{,}64\ \text{rad}$$

$$\varphi(\omega_2) = \frac{\pi}{2} - \arg\left(1+j\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega_2}{\omega_2}\right) \simeq -36{,}71^\circ \simeq -0{,}6$$